

## 0-04

## Rechnen mit Klammern

## Aufgaben

Die folgenden Aufgaben sind in Blöcke aufgeteilt. Innerhalb eines Blockes (I bis IX) werden die Aufgaben mit zunehmender Aufgabennummer schwieriger. Sie sollten auch in der Lage sein, die schwierigen Aufgaben eines Blockes zu bearbeiten. Beginnen Sie in jedem Block zuerst mit der **herorgehobenen** Aufgabe. Nur wenn Sie diese nicht bearbeiten können, fangen Sie mit der ersten Aufgabe des betreffenden Blockes an. Auf der 4. Seite dieses Dokuments finden Sie die Lösungen zu den Aufgaben. Fachliche Hilfe zum Rechnen mit Klammern finden Sie auf Seite 3.

**I** [Auflösen von Klammern] Lösen Sie in den folgenden Termen alle Klammern auf und vereinfachen Sie soweit wie möglich:



01)  $(a + 1)(2a + 1)$

02)  $a(2 - 2b)(b + 1)$

03)  $(a + 1)(b - 1)(a + b)$

04)  $a^2(1 - a^3)$

05)  $(a - b)(a + b)(a + b)$

06)  $(a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$

07)  $(\sqrt{a} - 1)(\sqrt{a} + 1)$

08)  $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$

09)  $\sqrt{a}(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$

10)  $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})(a + b)$

11)  $[5 + a(b + 3)](a - b)$

12)  $5 + a(b + 3)(a - b)$

13)  $\frac{2}{5}[(2a - b)\left(a + \frac{b}{2}\right) + (a - 2b)\left(\frac{a}{2} + b\right)]$

14)  $(a + b)\left[\left(a - \frac{1}{2}\right) + \left(b + \frac{1}{2}\right)\right]$

15)  $(a^2 + b^2)[(2a - 2b)(a + b) + (4a - 4b)(3a + 3b)]$

**II** [Ausklammern gemeinsamer Faktoren] Klammern Sie in den folgenden Termen so viele gemeinsame Faktoren aus wie möglich:



16)  $5a^2 + 25$

17)  $9a^2 - 81$

18)  $4a^3 + 3a^2b - 2ab^2$

19)  $2a^3 + 4a^2b + 2ab^2$

20)  $2a^3 - 4a^2b + 2ab^2$

21)  $\sqrt{ab^2} + ab$

22)  $\frac{1}{8}(x + x^2) + \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}xy$

23)  $ab - 2a^3b + 5ab^2 + 16a^2b^2$

24)  $3\sqrt{a} - 27\sqrt{2} + 9\sqrt{-2 + a}$

25)  $3\sqrt{a} + 9a^{1/2} - 3a^0 + 6\frac{a}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{9a^2}}{(\sqrt{a})^2}$

**III** [Mehrfaches Ausklammern gemeinsamer Faktoren] Faktorisieren Sie so oft wie möglich:



26)  $1 + a + b + ab$

27)  $b - a + ab - 1$

28)  $a + a^2 + b + ab$

29)  $-a + b + ab - b^2$

30)  $a + a^2 - ab - a^2b$

31)  $c - ac - bc + abc$

32)  $-1 + a + b - ab + c - ac - bc + abc$

33)  $ab - ab^2 + abc - ab^2c$

34)  $-b + ab + b^2 - ab^2 + bc - abc - b^2c + ab^2c$

**IV** [Binomische Formeln – I] Lösen Sie folgende Klammern unter Verwendung der binomischen Formeln auf:



35)  $3(1 - x)^2$

36)  $(1 - a)(a + 1)^2$

37)  $(1 - a)^2(1 + a)^2$

38)  $(1 + a)^2(1^2 - a^2)$

39)  $(\sqrt{a} + b)^2$

40)  $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$

41)  $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(a - b)$

42)  $(2a - a\sqrt{b})(2a + a\sqrt{b})$

43)  $(\sqrt{a} - b)(\sqrt{a} + b)$

44)  $\frac{1}{4}(a - 2\sqrt{b})(a + 2\sqrt{b}) - (1 - \sqrt{b})(\sqrt{b} + 1) + 1$

45)  $(2a - b)(3a - b)(a + b)(2a + b)$

**V** [Binomische Formeln – II] Formulieren Sie die folgenden Terme als Produkt mit zwei oder mehr Klammern:



46)  $a^2 + 2ac + c^2$

47)  $a^2 - 9b^2$

48)  $x^2 + 10xy + 25y^2$

49)  $8x^2 - 98y^2$

50)  $a^2b^2 - a^2 - b^2 + 1$

51)  $a - 1$

A

**VI** [Auflösen von Klammern] Vereinfachen Sie folgende Bruchterme durch geeignete Faktorisierung:



52)  $\frac{a^2-b^2}{a+b}$

55)  $\frac{(a-b)^2}{a^2-b^2} (a+b)^2$

58)  $\frac{a^3-a^2b-ab^2+b^3}{a^2-b^2}$

60)  $\frac{1}{a^2-b^2} \frac{a-b}{a^2+2ab+b^2} (a+b)^2$

53)  $\frac{(a+b)^2}{a^2-b^2}$

56)  $\frac{(a+b)^2}{a^2-b^2} (a-b)^2$

59)  $\frac{2b}{a^2-b^2} - \frac{a-b}{a^2-2ab+b^2} + \frac{a+b}{a^2+2ab+b^2}$

61)  $\frac{(a+b)^2}{a^2-b^2} : \frac{a+b}{a^2-2ab+b^2}$

54)  $\frac{a^2(a+b)^2}{a^3-ab^2}$

57)  $\frac{a^2b-2ab^2+b^3}{a^2b-b^3}$

62)  $\frac{1}{a^2-b^2} : \frac{1}{a^2+2ab+b^2}$

**VII** [Brüche umwandeln – 1] Ersetzen Sie die folgenden Bruch- und Potenzterme durch einen einzeiligen Term.



Ersetzen Sie  $\frac{a}{b}$  durch  $a/b$

Hinweis: Die Schreibweise  $a^b$  für die Potenzierung  $a^b$  wird in den meisten Programmiersprachen, aber auch in EXCEL verwendet.

Ersetzen Sie  $a^b$  durch  $a^b$

So ergibt beispielsweise  $5^3$  den Wert 125.

Führen Sie keine Kürzung des Ausgangstermes oder des einzeiligen Termes durch:

63)  $\frac{a^2-b^2}{a^2-2ab+b^2}$

66)  $a + b^{c+d}$

69)  $(a+b)^{c/d}$

64)  $\frac{a-b}{a^2-2ab+b^2} + 1$

67)  $(a+b)^c + d$

70)  $\frac{a}{b^c} = ab^{-c}$

65)  $(a+b)^{c+d}$

68)  $\frac{(a+b)^c}{d}$

71)  $\left(\frac{a}{b}\right)^c$

**VIII** [Brüche umwandeln – 1] Ersetzen Sie die folgenden einzeiligen Terme durch einen Bruchterm.



Führen Sie keine Kürzung des Ausgangstermes oder des einzeiligen Termes durch:

72)  $(a + b/c)^d$

75)  $a + b/c + d^e$

73)  $a + b/c^d$

76)  $(a + b/c + d)^{(e+f)}$

74)  $a + (b/c + d)^e$

77)  $(1/(a + b/c + d))^{(e+f)}$

**IX** [Textaufgaben] Lesen Sie die folgenden Aufgabentexte durch und formulieren Sie den Ansatz als Gleichung mit Klammern. Berechnen Sie die Lösung:



78) Ein rechteckiges Grundstück besitzt eine Fläche von  $A_1$  und eine Seitenlänge von  $a$ . Beide Seitenlängen werden um die Länge  $c$  erweitert. Berechnen Sie, um welche Fläche  $\Delta A$  sich das Grundstück vergrößert hat.

79) Sei  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Die Summe von  $a$  und  $b$  wird mit 2 multipliziert. Davon wird  $4a$  subtrahiert. Das Ergebnis wird anschließend durch das Produkt von  $c$  und der Differenz zwischen  $b$  und  $a$  dividiert. Berechnen Sie das Ergebnis und geben Sie dieses in gekürzter Form als Bruch an.

80) Ein Sparer legt bei einer Bank ein Guthaben von  $G_0$  als Startguthaben an. Nach Ablauf eines Jahres wird der Betrag mit  $p = 1,5\%$  verzinst. Dieser Zinsgewinn wird dem Sparguthaben gutgeschrieben und zukünftig ebenfalls verzinst (Zinseszins). Geben Sie in Klammerschreibweise an, wie hoch das Guthaben nach einem Jahr ( $G_1$ ) und nach zwei Jahren ( $G_2$ ) ist.

## Hinweise zum Rechnen mit Klammern

**Faktorisierung** Ausklammerung gemeinsamer Faktoren in einer Summe oder einer Differenz:

Beispiel 1:  $5a + 5 = 5(a + 1)$

Beispiel 2:  $a^2b + ab^2 + a = a(ab + b^2 + 1)$

**Mehrfache Faktorisierung** Nach einer Faktorisierung lässt sich möglicherweise nochmals ein Faktor ausklammern:

Beispiel 1:  $1 + a + b + ab = 1 + a + b(1 + a) = (1 + a)(b + 1)$

Beispiel 2:  $a^2 + 6a + 5 = a^2 + 5a + a + 5 = a(a + 5) + (a + 5) = (a + 1)(a + 5)$

**Binomische Formeln** Die folgenden drei **binomischen Formeln** finden Sie in Ihrer Mathematik-Merkhilfe:

Formel 1:  $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

Formel 2:  $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

Formel 3:  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

**Weitere Formeln** Die folgenden zwei Formeln finden ebenfalls Sie in Ihrer Mathematik-Merkhilfe:

Formel 1:  $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

Formel 2:  $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$

**Klammern** Sind mehrere Klammern miteinander „verschachtelt“, gilt folgende **Klammer-Hierarchie**:

( )	Runde Klammern									
[ ]	Eckige Klammern	{	{	[	(	)	]	}	}	}
{ }	Geschweifte Klammern									
Bei verschachtelten Klammern werden diese von <b>innen nach außen</b> bearbeitet ( <b>1</b> → <b>4</b> )		← 4	← 3	← 2	← 1	1 →	2 →	3 →	4 →	

**Beispiel**

$$\begin{aligned}
 & 2 + 5\{3 + 7[6 - (8 \cdot 3)(1 + 2)]\} = \\
 & \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \\
 & 2 + 5\{3 + 7[6 - (24)(3)]\} = \\
 & \quad \quad \quad \downarrow \\
 & 2 + 5\{3 + 7[6 - (72)]\} = \\
 & \quad \quad \quad \downarrow \\
 & 2 + 5\{3 + 7[-66]\} = \\
 & \quad \quad \quad \downarrow \\
 & 2 + 5\{3 - 462\} = \\
 & \quad \quad \quad \downarrow \\
 & 2 + 5\{-459\} = -2293
 \end{aligned}$$

**„Punkt vor Strich“** Die genaue Form von „Punkt vor Strich“ unterscheidet bei der „Punkt“-Rechnung zwischen Potenzierung, Multiplikation und Division:

Potenz <b>vor</b>	Division <b>vor</b>	Multiplikation <b>vor</b>	Strichrechnung
↓	↓	↓	↓
36/3 <sup>2</sup> = 36/9 = 4	75/3 · 5 = 25 · 5 = 125	5 · 7 + 3 = 35 + 3 = 38	

**„Punkt vor Strich“ und Klammern** Mit Hilfe von Klammern kann man die „Punkt vor Strich“-Regelung umgehen (aufheben):

Potenz <b>nicht</b> vor	Division <b>nicht</b> vor	Multiplikation <b>nicht</b> vor	Strichrechnung
↓	↓	↓	↓
(36/3) <sup>2</sup> = 12 <sup>2</sup> = 144	75/(3 · 5) = 75 · 15 = 5	5 · (7 + 3) = 5 · 10 = 50	

## Lösungen zu den Aufgaben

<b>I</b>	01) $2a^2 + 3a + 1$	02) $2a - 2ab^2$	03) $a^2b - a^2 + ab^2 - a + b^2 - b$	
	04) $a^2 - a^5$	05) $a^3 + a^2b - ab^2 - b^3$	06) $a^4 - b^4$	
	07) $a - 1$	08) $a - b$	09) $a^{3/2} - \sqrt{a}b$	
	10) $a^2 - b^2$	11) $a^2b + 3a^2 - ab^2 - 3ab + 5a - 5b$		
	12) $a^2b + 3a^2 - ab^2 - 3ab + 5$		13) $a^2 - b^2$	
	14) $a^2 + 2ab + b^2$		15) $14a^4 - 14b^4$	

<b>II</b>	16) $5(a^2 + 5)$	17) $9(a - 3)(a + 3)$	18) $a(4a^2 + 3ab - 2b^2)$
	19) $2a(a + b)^2$	20) $2a(a - b)^2$	21) $\sqrt{a}b(\sqrt{a} + b)$
	22) $\frac{1}{8}x(5x - 28y + 1)$	23) $-ab(2a^2 - 16ab - 5b - 1)$	
	24) $-3(-3\sqrt{a-2} - \sqrt{a} + 9\sqrt{2})$		25) $18\sqrt{a}$

<b>III</b>	26) $(a + 1)(b + 1)$	27) $(a + 1)(b - 1)$	28) $(a + 1)(a + b)$
	29) $(b - 1)(a - b)$	30) $-a(a + 1)(b - 1)$	31) $(a - 1)(b - 1)c$
	32) $(a - 1)(b - 1)(c - 1)$	33) $-a(b - 1)b(c + 1)$	
	34) $(a - 1)(b - 1)b(c - 1)$		

<b>IV</b>	35) $3x^2 - 6x + 3$	36) $-a^3 - a^2 + a + 1$	37) $a^4 - 2a^2 + 1$
	38) $-a^4 - 2a^3 + 2a + 1$	39) $2\sqrt{a}b + a + b^2$	40) $a - b$
	41) $a^{3/2} + a\sqrt{b} - \sqrt{a}b - b^{3/2}$	42) $4a^2 - a^2b$	43) $a - b^2$
	44) $\frac{a^2}{4}$	45) $12a^4 + 8a^3b - 7a^2b^2 - 2ab^3 + b^4$	

<b>V</b>	46) $(a + c)^2$	47) $(a - 3b)(a + 3b)$	48) $(x + 5y)^2$
	49) $(4x - 14y)(2x + 7y)$	50) $(a - 1)(a + 1)(b - 1)(b + 1)$	51) $(\sqrt{a} - 1)(\sqrt{a} + 1)$

<b>VI</b>	52) $a - b$	53) $\frac{a+b}{a-b}$	54) $\frac{a(a+b)}{a-b}$
	55) $a^2 - b^2$	56) $a^2 - b^2$	57) $\frac{a-b}{a+b}$
	58) $a - b$	59) $0$	
	60) $\frac{1}{a+b}$	61) $a - b$	62) $\frac{a+b}{a-b}$

<b>VII</b>	63) $(a^2 - b^2)/(a^2 - 2ab + b^2)$	64) $1 + (a - b)/(a^2 - 2ab + b^2)$	
	65) $(a + b)^{(c + d)}$	66) $a + b^{(c + d)}$	
	67) $(a + b)^c + d$	68) $(a + b)^c / d$	
	69) $(a + b)^{(c/d)}$	70) $a/b^c$	71) $(a/b)^c$

<b>VIII</b>	72) $(a + \frac{b}{c})^d$	73) $a + bc^{-d}$	74) $a + (\frac{b}{c} + d)^e$
	75) $a + \frac{b}{c} + d^e$	76) $(a + \frac{b}{c} + d)^{e+f}$	77) $(\frac{1}{a + \frac{b}{c} + d})^{e+f}$

<b>IX</b>	78) $A_1 = ab \rightarrow b = \frac{A_1}{a}$ und $A_2 = (a+c)(b+c) = (a+c)(\frac{A_1}{a} + c) \rightarrow \Delta A = A_2 - A_1 = \frac{c(a^2 + A_1 + ac)}{a}$	
	79) $\frac{(a+b)2-4a}{c(b-a)} = \frac{2}{c}$	
	80) nach einem Jahr: $G_1 = G_0 + pG_0 = G_0(1 + p) = G_0(1,015)$ nach zwei Jahren: $G_2 = G_1 + pG_1 = G_0(1 + p)^2 = G_0(1,015)^2 = G_0(1,030225)$	